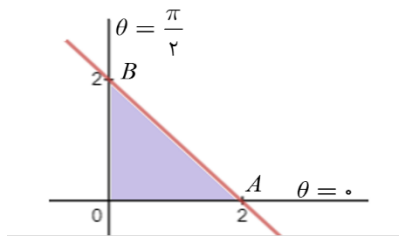




۱- گزینه ۲ صحیح است.

با طرفین وسطین کردن کسر و تبدیلات قطبی به دکارتی داریم:

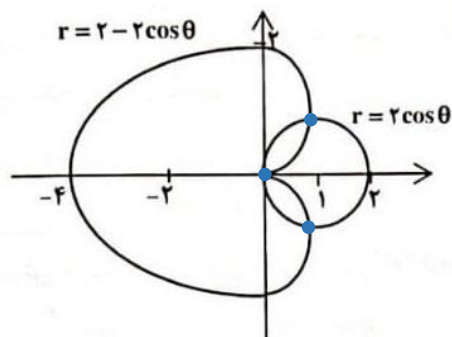
$$r = \frac{2}{\sin \theta + \cos \theta} \Rightarrow r \sin \theta + r \cos \theta = 2 \Rightarrow x + y = 2$$



$$\Rightarrow S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times OA \times OB = 2$$

۲- گزینه ۲ درست است.

بهترین روش برای تعیین نقاط تلاقی منحنی‌های قطبی، رسم نمودارهای آنهاست.

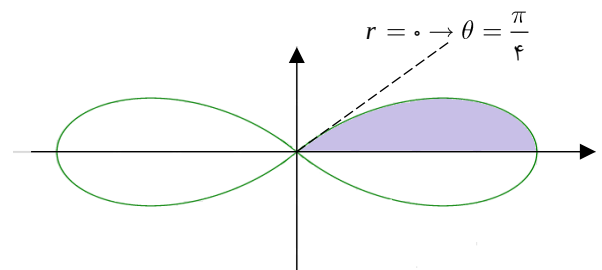


پس دو منحنی در سه نقطه تلاقی دارند.

۳- گزینه ۱ صحیح است.

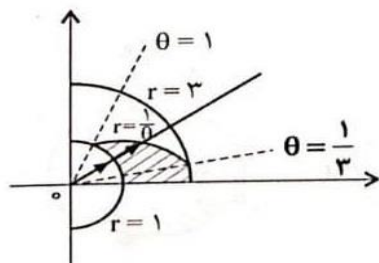
$$\xrightarrow{\text{فرمول}} S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4 \cos^2 2\theta) d\theta = \frac{4}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$



۴- گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا براساس نقاط تلاقی منحنی ها بازه های انتگرال گیری را تعیین می کنیم.



$$\begin{cases} r = \frac{1}{\theta} \\ r = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \theta = \frac{1}{3} \quad \begin{cases} r = \frac{1}{\theta} \\ r = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \theta = 1$$

حال مساحت ناحیه موردنظر را در دو بخش $0 \leq \theta \leq \frac{1}{3}$ و $\frac{1}{3} \leq \theta \leq 1$ محاسبه می کنیم.

$$S = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{3}}^1 (3^2 - 1^2) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{3}}^1 \left(\left(\frac{1}{\theta} \right)^2 - 1^2 \right) d\theta \Rightarrow S = \frac{1}{2} (8) \left(\frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\theta} \right) \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{1} \right| = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \left(2 - \frac{2}{3} \right) = 2$$

۵- گزینه ۱ صحیح است.

منحنی قطبی موردنظر یک رز ۴برگ است که چون نسبت به محور قطبی تقارن دارد، فقط باید قسمت بالای منحنی را دوران

دهیم. برای محاسبه حجم حاصل از دوران حول محور قطبی از فرمول $V_{ox} = \frac{2\pi}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^3 \sin \theta d\theta$ استفاده می کنیم.

$$r = 0 \Rightarrow a \sin 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

$$\longrightarrow V_{ox} = 2 \times \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^3 2\theta \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{4a^3\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta \cos \theta)^3 \sin \theta d\theta = \frac{32a^3\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^3 \theta d\theta$$

$$\xrightarrow{\cos^3 \theta = 1 - \sin^2 \theta} V = \frac{32a^3\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 \theta - \sin^6 \theta) \cos \theta d\theta$$

$$\xrightarrow{t = \sin \theta, dt = \cos \theta d\theta} \frac{32a^3\pi}{3} \int_0^1 (t^4 - t^6) dt = \frac{32a^3\pi}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{64a^3\pi}{105}$$